

SUPPORT DE COURS

Notions de Logique

1^{ère} BAC sciences expérimentales

Enseignant

Dr : CHOKRI NOUAR

www.chokrinouar.com

Table des matières

1	Notion de Logique	3
1.1	Proposition-Fonction propositionnelle	3
1.2	Les quantificateurs :	4
1.3	OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :	6
1.3.1	La négation d'une proposition :	6
1.3.2	La disjonction	8
1.3.3	La conjonction	8
1.3.4	L'implication	9
1.3.5	L'équivalence	11
1.4	Lois logiques	12
1.5	Raisonnements mathématiques	13
1.5.1	Raisonnement par contre-exemple :	13
1.5.2	Raisonnement par la contraposée :	14
1.5.3	Raisonnement par les équivalences successives :	14
1.5.4	Raisonnement par disjonction des cas :	15
1.5.5	Raisonnement par absurde :	16
1.5.6	Raisonnement par récurrence	17

Notion de Logique

1.1 Proposition-Fonction propositionnelle

Activité 1.1. Mettre une croix (X) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité	N'a pas de sens
○ 15×2				
○ $12 \times 3 + 4 = 20$				
○ $-6 \notin \mathbb{N}$				
○ 2 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$				
○ Chaque nombre impair est un nombre premier.				
$(x \in \mathbb{Z}) : x + 5 \geq 0$.				
○ Soient x, y de $\mathbb{Z}$, on a $2x - y = 1$				

Définition 1.1. • Une proposition (ou assertion) est une phrase ou une expression qui a un sens et qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux en même temps.

On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ...

- On appelle fonction propositionnelle tout énoncé qui contient une variable (ou plusieurs variables) d'un ensemble, elle devienne proposition chaque fois qu'on remplace la variable par un élément de cet ensemble.

Exemple 1.1. ○ " Le nombre 2022 est pair " est une proposition vraie.

○ " Tout carré est un parallélogramme " est une proposition vraie.

○ " Tout nombre pair est divisible par 4 " est une proposition fausse.

○ " $x + y = z$ " n'est pas une proposition.

○ " $P(x) : x \in \mathbb{R}, x^2 - x < 0$ " est une fonction propositionnelle.

$P(0)$ est une proposition fausse mais $P\left(\frac{1}{2}\right)$ est une proposition vraie

- " $P(n, m) : n + m = 10$ avec n, m de $\mathbb{N}$ " est une fonction propositionnelle $P(4; 6)$ est une proposition vraie mais $P(2; 7)$ est une proposition est fausse.

Application 1.1. Déterminer la vérité de chacun des propositions suivantes :

- $P : \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{7}{3}$.
- $Q : \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}} \in \mathbb{N}$.
- $R : \text{"L'équation } x^2 - 3x + 5 = 0 \text{ admet deux solutions dans } \mathbb{R}.$

1.2 Les quantificateurs :

Activité 1.2. 1. Mettre une croix (X) dans la case qui convient :

Proposition	Vrai	Faux
Le carré de tout nombre réel est positif.		
Il existe un nombre réel inférieur strictement à 1.		
Tout nombre réel est décimal.		
L'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution réelle.		

Les propositions pre ce dentes apparaissent sous forme de phrases, mais on peut les écrire à l'aide des symboles. Si on symbolise "pour tout " ou " quel que soit " avec le symbole $\forall$ et " Il existe au moins " avec le symbole $\exists$, alors la première proposition du tableau devient $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0$ et la deuxième devient $(\exists x \in \mathbb{R}) : x < 1$.

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés les quantificateurs.

2. Compléter le tableau suivant en utilisant les symboles $\forall$ et $\exists$.

Proposition	Proposition à l'aide des quant
◦ Tous les entiers naturels sont positifs	•
◦	• $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$
◦ L'équation $3x - 2 = 0$ admet une solution réelle	•
◦ Tout nombre réel est décimal	•
◦	• $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - x + 1 > 0$
◦ Pour tout entier réel x , il existe un entier naturel n tel que $x < n + 1$	•
◦ $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : m = 2n$	•

Définition 1.2. Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que x est un élément d'un ensemble E .

- Si $P(x)$ est vraie pour tout élément de E on écrit : $(\forall x \in E) : P(x)$.
Le symbole " $\forall$ " s'appelle **quantificateur universel** et il se lit : **pour tout** ou **quel que soit**.
- S'il existe au moins un élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists x \in E) : P(x)$.
Le symbole " $\exists$ " s'appelle **quantificateur existentiel** et il se lit : **il existe au moins**.
- S'il existe un unique élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists! x \in E) : P(x)$.
Le symbole " $\exists!$ " s'appelle **quantificateur existentiel de l'unicité** et il se lit : **il existe un unique**.

Exemple 1.2.

- $P : "(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0"$ est une proposition fausse parce que si $x = 0$, alors $2 \times 0 + 1 = 0$ est faux.
- $Q : "(\exists n \in \mathbb{N}) : 2n - 4 = 0"$ est une proposition vraie car l'entier $n = 2$ vérifie $2n - 4 = 0$.
- $R : "(\exists! x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 1 = 0"$ est une proposition vraie parce que 1 est la seule solution de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Application 1.2. Réécrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs logiques.

- ✓ P_1 : "La valeur absolue de tout nombre réel non nul est strictement positive".
- ✓ P_2 : "Il existe au moins un nombre réel x tel que $2x^2 - 3x = 0$ ".
- ✓ P_3 : "L'équation $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ admet une unique solution réelle".
- ✓ P_4 : "Le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ admet au moins une racine".
- ✓ P_5 : "Pour tout nombre réel x , il existe un unique entier N tel que $N \leq x < N + 1$ ".
- ✓ P_6 : "Il existe un entier multiple de tous les autres".

Remarque.

- On peut inverser deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels.

- On ne peut a priori pas inverser un quantificateur existentiel avec un quantificateur universel.

Exemple 1.3. ◦ Les propositions " $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " et " $(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " ont la même valeur de vérité.

◦ Les propositions " $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " et " $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " n'ont pas la même valeur de vérité. La première est fausse mais la deuxième est vraie.

Exercice 1.1. Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P_1 : "(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x - 1 = 0"$.
- $P_2 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 3x + 7 < 0"$.
- $P_3 : "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \leq y"$.
- $P_4 : "(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq y"$.
- $P_5 : "(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq y"$.
- $P_6 : "(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x \leq y"$.

1.3 OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :

1.3.1 La négation d'une proposition :

Définition 1.3. La négation d'une proposition P , noté $\bar{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.

P	$\bar{P}$	Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.
V	F	
F	V	

Exemple 1.4. ◦ La négation de la proposition $3 > 2$ est $3 \leq 2$.

◦ La négation de la proposition $(-2)^2 = -4$ est $(-2)^2 \neq -4$.

◦ La négation de la proposition $-3 \in \mathbb{N}$ est $-3 \notin \mathbb{N}$.

- Propriété 1.1.**
- La négation de la proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est " $(\exists x \in E) : \bar{P}(x)$ ".
 - La négation de la proposition " $(\exists x \in E) : P(x)$ " est " $(\forall x \in E) : \bar{P}(x)$ ".
 - La négation de la proposition " $(\forall x \in E)(\exists y \in E) : P(x, y)$ " est :
" $(\exists x \in E)(\forall y \in E) : \bar{P}(x, y)$ ".
 - La négation de la proposition : " $(\exists x \in E)(\forall y \in E) : P(x, y)$ " est :
" $(\forall x \in E)(\exists y \in E) : \bar{P}(x, y)$ ".

Remarque.

- ✓ Les propositions P et $\bar{\bar{P}}$ ont même valeur de vérité.
- ✓ On a le tableau suivant :

Le symbole	>	<	≥	≤	=	∈
Sa négation	≤	≥	<	>	≠	∉

Exemple 1.5.

La proposition P	La négation $\bar{P}$
$\circ (\forall x \in \mathbb{R}) : x \geq 1$	$\circ (\exists x \in \mathbb{R}) : x < 1$
$\circ (\exists n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$	$\circ (\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$
$\circ (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 \geq 0$	$\circ (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 < 0$
$\circ (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : m \geq n$	$\circ (\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : m < n$

Application 1.3. Compléter le tableau suivant :

Proposition P	La négation $\bar{P}$
$\circ (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2x + 1 \geq 0$	•
$\circ (\forall x \in \mathbb{N}) : x^2 - 2x < 0$	•
$\circ (\forall x \in \mathbb{Q}) : \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$	•
$\circ (\exists x \in \mathbb{R}) : x \in \mathbb{Q}$	•
$\circ (\exists x \in \mathbb{N}) : x \text{ est pair}$	•
$\circ (\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) : x < y$	•
$\circ (\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : m = 2n$	•
$\circ \text{ Tout triangle est rectangle}$	•
$\circ (\forall x \in \mathbb{Q})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x \times y \in \mathbb{Z}$	•

1.3.2 La disjonction

Définition 1.4. La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie on la note P ou Q ou $P \vee Q$.

Tableau de vérité de P ou Q :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.6. ◦ La proposition : $(-5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ est vraie.

- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ ou $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ ou (3 divise 12) est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ ou $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

1.3.3 La conjonction

Définition 1.5. La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note : P et Q ou $P \wedge Q$.

Tableau de vérité de $(P$ et $Q)$:

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.7. ◦ La proposition : $(-5 \geq 2)$ et $(5 \geq 2)$ est fausse.

- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ et $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ et (3 divise 12) est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

Application 1.4. Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : (3 est impair) et $(3 = 5)$.
- P_2 : $(4 \times 8 = 20)$ ou (10 est pair).
- P_3 : $(9 - 3 = 6)$ et $(-1 \in \mathbb{Z})$.

- $P_4 : (-4 \in \mathbb{N}) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0).$

Remarque. [Lois de Morgane] Soient P et Q deux propositions.

- ✓ La négation de $(P \text{ et } Q)$ est $(\overline{P} \text{ ou } \overline{Q})$.
- ✓ La négation de $(P \text{ ou } Q)$ est $(\overline{P} \text{ et } \overline{Q})$.

Exemple 1.8. ◦ La négation de « $(0 \geq 2)$ et $(1 + 5 = 3)$ » est : « $(0 < 2)$ ou $(1 + 5 \neq 3)$ ».
 ◦ La négation de « $(5 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0)$ » est : « $(5 \notin \mathbb{N})$ et $(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0)$ ».

Application 1.5. Déterminer la négation des propositions suivantes :

- $P : " (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \leq y \text{ ou } x \geq y "$.
- $Q : " (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 = x \text{ et } x > 0 "$.

1.3.4 L'implication

Définition 1.6. L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse. On la note par $P \Rightarrow Q$ et se lit : P implique Q .

Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.9. ◦ La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2 + 3 = -1$ est fausse.

- La proposition $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5 - 1 = 20$ est vraie.
- La proposition $(3^2 = 9) \Rightarrow 4 - 1 = 3$ est vraie.
- La proposition $2 < 0 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ est vraie.

Remarque.

- ✓ $P \Rightarrow Q$ signifie si P est vraie, alors Q est vraie.
- ✓ L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- ✓ Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vrai, on suppose que P est vraie, et on montre que Q est vraie.
- ✓ Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $(\bar{P} \text{ ou } Q)$ ont la même valeur de vérité.

Exemple 1.10. ◦ " $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ " signifie : "si $x = 2$, alors $x^2 = 4$ " et c'est une proposition vraie.

- " $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ " est l'implication réciproque de " $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ " et c'est une proposition fausse.
- Soit x un réel, Montrons que : $|x| \leq 3 \Rightarrow |2x - 4| \leq 10$
On a :

$$\begin{aligned}
 |x| \leq 3 &\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\
 &\Rightarrow -6 \leq 2x \leq 6 \\
 &\Rightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 2 \\
 &\Rightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 10 \\
 &\Rightarrow |2x - 4| \leq 10
 \end{aligned}$$

Donc : $|x| \leq 3 \Rightarrow |2x - 4| \leq 10$.

Application 1.6. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n pair $\Rightarrow n^2$ pair.

2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \right)$.

Exercice 1.2. Soient x et y de $\mathbb{R}$. Montrer que $1 + xy = x + y \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$.

Exercice 1.3. 1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$.

2. a. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.

b. En déduire $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$.

1.3.5 L'équivalence

Définition 1.7. L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P est équivalente à Q » ou bien « P si et seulement si Q ». - $P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si P et Q ont même valeur de vérité.

Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1.11. Soient a et b deux nombres réels

Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Inversement, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$.

Donc on a l'équivalence suivant $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Application 1.7. Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- $P_1 : 3 \text{ est impair} \Leftrightarrow 3 = 5$.
- $P_2 : 4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10 \text{ est pair}$.
- $P_3 : -1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$.
- $P_4 : -4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 \succ 0$.

1.4 Lois logiques

Définition 1.8. Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions que la constitue.

Exemple 1.12. P et Q sont deux propositions. Montrons que $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$ est une loi logique.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q)$	$\neg P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V

La proposition $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$ est toujours vraie quelles que soient les valeurs de

vérité de P et Q . Donc elle est une loi logique.

Application 1.8. Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

- $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$
- $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \neg Q$
- $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$
- $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

1.5 Raisonnements mathématiques

1.5.1 Raisonnement par contre-exemple :

Propriété 1.2. Pour prouver que la proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est fausse, il suffit de prouver que la proposition " $(\exists x \in E) : \neg P(x)$ " est vraie.

Exemple 1.13. Montrons que " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x - 1 = 0$ " est fausse.

Il suffit de montrer que " $(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 \neq 0$ " est vraie.

On a pour $x = 0 : 2 \times 0 - 1 \neq 0$

Alors " $(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 \neq 0$ " est vraie.

Par suite " $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 = 0$ " est fausse.

Application 1.9. Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

- $P_1 : "(\forall x \in \mathbb{R}) : x + 1 = 2"$.
- $P_2 : "(\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2"$.
- $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1.5.2 Raisonnement par la contraposée :

Propriété 1.3. Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, on peut essayer de démontrer la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ qui est parfois plus simple.

Exemple 1.14. Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) : x \neq y \Rightarrow x^3 + 4x \neq y^3 + 4y$.

Essayons de montrer $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) : x^3 + 4x = y^3 + 4y \Rightarrow x = y$.

On a $x^3 + 4x = y^3 + 4y \Rightarrow x^3 - y^3 + 4x - 4y = 0$

$$\Rightarrow (x - y) (x^2 + xy + y^2) + 4(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y) (x^2 + xy + y^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 + 4 \neq 0 \text{ du fait que } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } y \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow x = y$$

Application 1.10. 1. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a + b > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{2} \text{ ou } b > \frac{1}{2}$.

2. Montrer que : $(\forall x > 1)(\forall y > 1) : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$.

1.5.3 Raisonnement par les équivalences successives :

Propriété 1.4. Soient P , R et Q trois propositions.

Le raisonnement par les équivalences successives se basé sur la loi logique suivant :

$$[(P \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

Exemple 1.15. Montrons que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$
 On a : $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b.$$

Application 1.11. 1. Montrer que : $(\forall x \neq -1)(\forall y \neq -1) : \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x = y.$

2. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, que $(\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x}) \Leftrightarrow (x = 1).$

3. Montrer, pour tout x de $[1; +\infty[$, que $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}.$

Exercice 1.4. 1. Soit x un réel. Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}.$

2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : |x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}.$

3. Soient $a \in [1; +\infty[$ et $b \in [4; +\infty[$. Montrer que

$$\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = 2 \text{ et } b = 8.$$

1.5.4 Raisonnement par disjonction des cas :

Propriété 1.5. Soient P , R et Q trois propositions.

Pour montrer que $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R]$ on montre parfois $[P \Rightarrow R \text{ et } Q \Rightarrow R]$.

Exemple 1.16. Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{1+x^2} + x > 0$.

- Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{1+x^2} + x > 0$ du fait que $\sqrt{1+x^2} > 0$.

- Supposons que $x < 0$.

On a $1+x^2 > x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > |x|$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > -x$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0.$$

Donc dans tous les cas de x , $\sqrt{1+x^2} + x > 0$.

Par suite $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{1+x^2} + x > 0$.

Application 1.12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n^2 + n$ est pair.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 1.5. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-1| \leq x^2 - x + 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.5.5 Raisonnement par absurde :

Propriété 1.6. Soient P et Q deux propositions.

Le raisonnement par absurde est basé sur la loi logique $[\bar{P} \Rightarrow (Q \text{ et } \bar{Q})] \Rightarrow P$.

Exemple 1.17. Soit n un entier naturel tel que n^2 est pair. Montrons que n est pair :

Supposons n est impair, alors $(\exists k \in \mathbb{N}) : n = 2k + 1$.

Donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair, ce qui est contredit le fait que n^2 est pair.

D'où d'après le principe du raisonnement par l'absurde, n est pair.

Application 1.13. Soient x, y et z de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ et $xyz > 1$.

Montrer que $x \neq 1, y \neq 1$ et $z \neq 1$.

1.5.6 Raisonnement par récurrence

Propriété 1.7. Le principe de récurrence permet de montrer qu'une fonction propositionnelle $P(n)$ vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

- **Initialisation** : On prouve que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$.
- **Hérédité** : On prend $n \geq n_0$ donné on suppose que $P(n)$ est vraie, et on démontre que $P(n + 1)$ est vraie.
- **Conclusion** : On conclut que, pour tout $n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

Exemple 1.18. Montrons que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0, 4^0 - 1 = 0$ et 3 divise 0. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que 3 divise $4^n - 1$.

Montrons que 3 divise $4^{n+1} - 1$:

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1.$$

D'après l'hypothèse de la récurrence, il existe un entier naturel k tel que $4^n - 1 = 3k$.

$$\text{Donc } 4^{n+1} - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1 = 3(4^n + k) = 3k' \text{ et } k' \in \mathbb{N}.$$

Ce qui entraîne que 3 divise $4^{n+1} - 1$.

D'où d'après le principe de récurrence on conclut que 3 divise $4^n - 1 (\forall n \in \mathbb{N})$.

- Application 1.14.**
1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2/5^n - 3^n$
 2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
 3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....