

SUPPORT DE COURS

Produit scalaire dans le plan

1^{ère} BAC sciences expérimentales

Enseignant

Dr : CHOKRI NOUAR

www.chokrinouar.com

Table des matières

4	Produit scalaire dans le plan	3
4.1	Expression analytique du produit scalaire	3
4.1.1	Produit scalaire dans un repère orthonormé	3
4.1.2	Norme d'un vecteur	3
4.1.3	Expressions des cosinus et sinus	4
4.1.4	Inégalités usuelles	4
4.2	Applications du produit scalaire	4
4.2.1	Équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné	5
4.2.2	Distance d'un point à une droite	5
4.2.3	Équation d'un cercle de centre et rayon donnés	6
4.2.4	Équation d'un cercle de diamètre donné	6
4.3	Représentation paramétrique d'un cercle	7
4.3.1	Étude de l'ensemble $\{M(x; y)/x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$	8
4.3.2	Positions relatives d'une droite et d'un cercle	8
4.3.3	Équation de tangente à un cercle en un point	9

Produit scalaire dans le plan

4.1 Expression analytique du produit scalaire

Dans tout ce qui suit, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4.1.1 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété 4.1. Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $xx' + yy'$, et on écrit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Propriété 4.2. Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan. les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, c'est à dire :

$$xx' + yy' = 0$$

Exemple 4.1. 1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}(5; 3)$ et $\vec{v}(2; -1)$ sont orthogonaux.
2. Déterminer les valeurs du réel m , sachant que les vecteurs $\vec{u}(2 - m; 0)$ et $\vec{v}(4m; -6)$ sont orthogonaux.

4.1.2 Norme d'un vecteur

Propriété 4.3. 1. Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur du plan. Le norme de $\vec{u}$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. la distance AB est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Exemple 4.2. Soit $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$ et $C(-3; 3)$ trois points du plan.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Dédire que ABC est un triangle rectangle isocèle en A .

4.1.3 Expressions des cosinus et sinus

Propriété 4.4. Soit $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$ deux vecteurs non nuls du plan et θ une mesure d'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

1. $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{ac + bd}{\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}}.$
2. $\sin(\theta) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}}.$

Remarque. L'aire du triangle ABC est donnée par : $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|.$

Exemple 4.3. Soit $A(-2; 0)$, $B(1; 1)$ et $C(2; -2)$ trois points du plan.

1. Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. En déduire une mesure d'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2. Calculer l'aire du triangle ABC .

4.1.4 Inégalités usuelles

Propriété 4.5. Soit $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(c; d)$ deux vecteurs non nuls du plan, on a :

1. Inégalité de **Cauchy-Schwarz** :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \quad \text{ou encore } |ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}$$

2. Inégalité **triangulaire** :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad c' \text{ est à dire } \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}$$

Exemple 4.4. 1. Soit $\vec{u}(a; 1)$ et $\vec{v}(1; \sqrt{a})$ deux les vecteurs du plan, où a un réel positif.

- a. Montrer que : $a + \sqrt{a} \leq \sqrt{a+1} \times \sqrt{a^2+1}.$
 - b. Dédire que : $a + \sqrt{a} \leq (a+1)(a^2+1).$
2. Soit A, B et C trois points du plan. Montrer que : $AC \leq AB + BC.$

4.2 Applications du produit scalaire

4.2.1 Équation cartésienne d'une droite de vecteur normal donné

Définition 4.1. Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal à une droite (D) s'il est orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) .

Propriété 4.6. Soient $\vec{n}(a; b)$ un vecteur non nul et $A(x_A; y_A)$ un point du plan.

1. l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est la droite (D) de vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point A , d'équation cartésienne de la forme :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

2. Une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où c un réel, est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$.

Remarque.

1. Soit $M(x; y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in (D) &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by - (ax_A + by_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{avec } c = -(ax_A + by_A) \end{aligned}$$

2. Si (D) une droite d'équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de (D) .

Exemple 4.5. Soit $A(-1; -1)$ et $B(3; 1)$ deux points du plan et (D) la médiatrice du $[AB]$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) .

Propriété 4.7. Soit (D) la droite de vecteur normal $\vec{n}_1$ et (D_2) la droite de vecteur normal $\vec{n}_2$. Les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

Remarque. Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser le produit scalaire des vecteurs directeurs.

Exemple 4.6. Soit les trois droites $(D_1) : -2x + y - 3 = -0$, $(D_2) : mx - y = 0$ et $(D_3) : -4x + 2y + 5 = 0$

1. Déterminer la valeur du m , sachant que (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.
2. Montrer que (D_1) et (D_3) sont parallèles.

4.2.2 Distance d'un point à une droite

Propriété 4.8. La distance d'un point $A(x_A; y_A)$ à une droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ est donné par :

$$d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

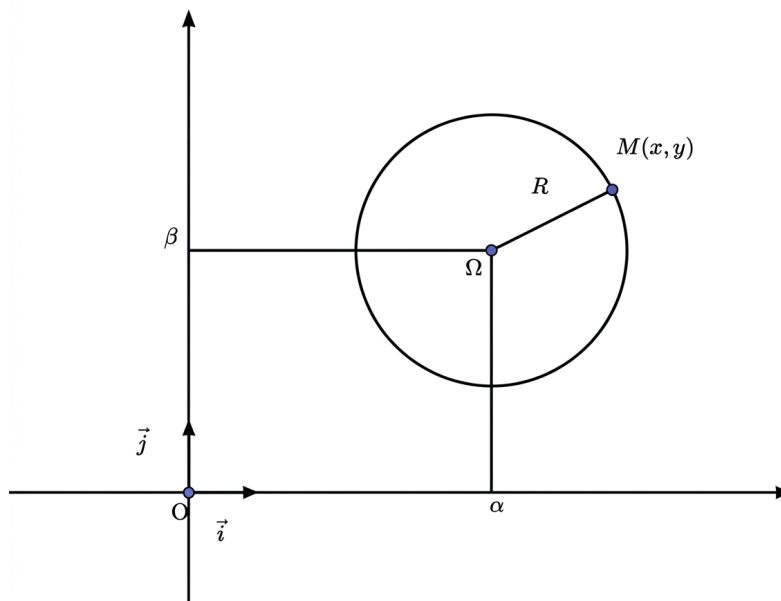
Exemple 4.7. Soit (D) la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$.

1. Calculer la distance du point $A(2; -1)$ à (D) . En déduire que $A \notin (D)$.
2. Calculer la distance du point $B(3; 2)$ à (D) . En déduire que $B \in (D)$.

4.2.3 Équation d'un cercle de centre et rayon donnés

Propriété 4.9. Soit (C) un cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon R . Une équation cartésienne du (C) est donnée par :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$



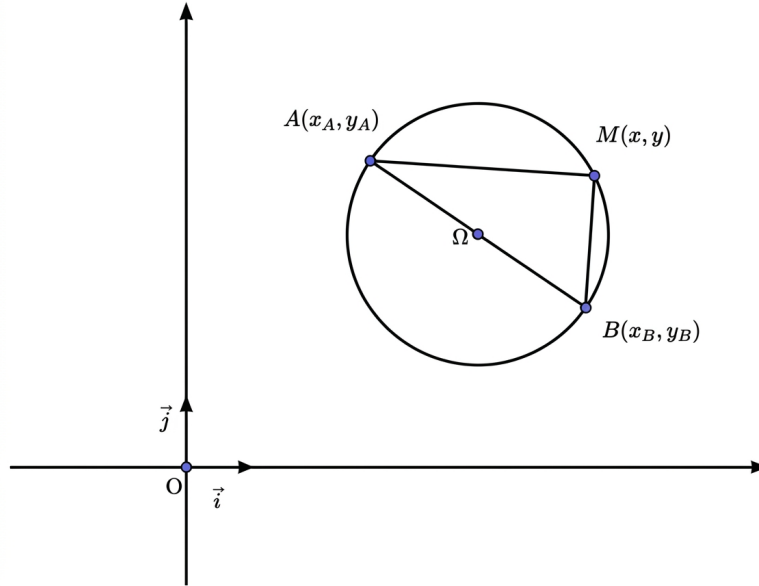
Exemple 4.8. 1. Donner une équation du cercle (C) de centre $\Omega(0; 0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
 2. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{5}y + 6 = 0$ est équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(-2; \sqrt{5})$ et de rayon $\sqrt{3}$.

4.2.4 Équation d'un cercle de diamètre donné

Propriété 4.10. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts du plan. L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle (C) de diamètre $[AB]$, d'équation cartésienne de la forme :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Le triangle AMB est rectangle en M .



Exemple 4.9. Soit $A(10; 4)$ et $B(0; 4)$ deux points du plan et (C) un cercle de diamètre $[AB]$.

1. Déterminer le centre et le rayon du (C) .
2. Donner une équation cartésienne du cercle (C) .

4.3 Représentation paramétrique d'un cercle

Propriété 4.11. Soit (C) un cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon R .

On appelle représentation paramétrique du cercle (C) le système d'équation de la forme :

$$\begin{cases} x = \alpha + R \cos(t) \\ y = \beta + R \sin(t) \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$$

Exemple 4.10. Soit (C) un cercle de centre $\Omega(0; 1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

1. Donner une représentation paramétrique du (C) .
2. Dédire une équation cartésienne du cercle (C) .

4.3.1 Étude de l'ensemble $\{M(x; y)/x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$

Propriété 4.12. Soit (E) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, où a , b et c sont des réels.

On pose $k = a^2 + b^2 - 4c$:

1. Si $k < 0$, alors l'ensemble (E) est vide : $(E) = \emptyset$
2. Si $k = 0$, alors l'ensemble (E) est un singleton : $(E) = \left\{ \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$.
3. Si $k > 0$, alors l'ensemble (E) est un cercle de centre $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{k}}{2}$.

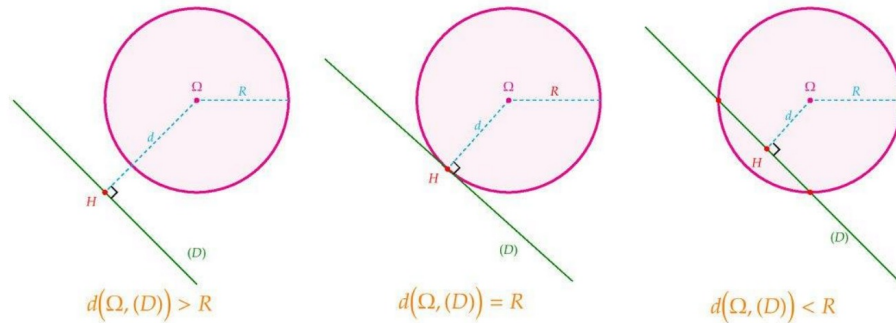
Exemple 4.11. Étudier la nature des ensembles suivants :

1. $(E_1) = \{M(x; y)/x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0\}$.
2. $(E_2) = \{M(x; y)/x^2 + y^2 - y + 1 = 0\}$.
3. $(E_3) = \{M(x; y)/x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0\}$.

4.3.2 Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Propriété 4.13. Soit (D) une droite et (C) un cercle de centre Ω et de rayon R .

1. Si $d(\Omega, (D)) > R$, alors (D) est extérieur au cercle (C) .
2. Si $d(\Omega, (D)) = R$, alors (D) est tangente au cercle (C) .
3. Si $d(\Omega, (D)) < R$, alors (D) est sécante au cercle (C) .



Remarque.

1. Si $d(\Omega, (D)) = R$, alors (D) et (C) ont un seul point commun.
2. Si $d(\Omega, (D)) < R$, alors (D) et (C) ont deux points communs

Exemple 4.12. Étudier l'intersection de la droite (D) et le cercle (C) dans chacun des cas suivants :

1. $(D) : y = x$ et $(C) : x^2 + (y - 4)^2 = 8$
2. $(D) : x + y + 5 = 0$ et $(C) : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$
3. $(D) : y = \sqrt{2}x$ $(C) : x^2 + y^2 + 3x + 3y + 9 = 0$

4.3.3 Équation de tangente à un cercle en un point

Propriété 4.14. Soit (C) un cercle de centre Ω et A un point de (C) .

L'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$ est la droite tangente au cercle (C) en A .

Remarque. Soit (T) une tangente à (C) de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ en $A(x_A; y_A)$, on a :

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (T) &\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0 \\ &\iff (x - x_A)(\alpha - x_A) + (y - y_A)(\beta - y_A) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui détermine une équation de (T) .

Exemple 4.13. Soit (C) le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$.

1. Vérifier que le point $A(1; 2)$ appartient à (C) .
2. Donner une équation cartésienne de (T) la tangente à (C) en A .
Ce qui détermine une équation de (T) .

Exemple 4.14. Soit (C) le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$.

1. Vérifier que le point $A(1; 2)$ appartient à (C) .
2. Donner une équation cartésienne de (T) la tangente à (C) en A .