

Niveau : 1er BAC - Sciences mathématiques

Volume horaire : 8 heures

Degré d'importance : 30%

Les recommandations pédagogiques :

- On approchera les propositions, les lois logiques et les méthodes de raisonnement, à partir d'activités variées et diverses, issues des acquis de l'élève et de situations déjà rencontrées ;
- On évitera toute construction théorique et toute utilisation excessive de tableaux de vérité ;
- Les résultats concernant la logique devront être exploités à tout moment opportun dans les différents chapitres du programme.

Les capacités attendues :

- Transformer un énoncé mathématique en écriture symbolique en utilisant les connecteurs et les quantificateurs logiques et inversement ;
- Utiliser le type de raisonnement convenable selon la situation étudiée ;
- Rédiger des raisonnements et des démonstrations mathématiques claires et logiquement correctes.

Les pré-requis :

- Connaître les bases des ensembles et des opérations élémentaires sur les ensembles ;
- Maîtriser les règles de logique élémentaire (par exemple : négation, conjonction, disjonction) ;
- Avoir une bonne compréhension des raisonnements mathématiques de base et des démonstrations simples.

Les extensions :

- Approfondir l'étude des raisonnements par récurrence ;
- Explorer les systèmes logiques plus complexes, comme la logique des prédicats ;
- Étudier l'application de la logique dans des domaines comme l'informatique et la théorie des graphes.

Le contenu du cours :

- 1 Propositions ; opérations sur les propositions ; fonctions propositionnelles ;
- 2 Les quantificateurs ; les propositions quantifiées ; les lois logiques ;
- 3 Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ; raisonnement par contraposée ; raisonnement par disjonction des cas ; raisonnement par équivalence ; raisonnement par récurrence.

C'est à force de forger que l'on devient forgeron.

I Proposition-Fonction propositionnelle

Activité 1

Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité	N'a pas de sens
• 15×2				
• $12 \times 3 + 4 = 20$				
• $-7 \notin \mathbb{N}$				
• 2 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - x - 2$.				
• tout nombre impair est premier				
• pour $x \in \mathbb{Z}$, On a : $x + 7 \leq 0$				
• pour tout $x \in \mathbb{R}$, On a : $\sqrt{x^2} = x$				

Activité 2

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses :

- Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair.
- La somme de quatre nombres positifs consécutifs est un nombre divisible par 4.

Solution :

This image shows a full page of dot grid paper. It features approximately 20 horizontal rows of small, evenly spaced black dots. The dots are arranged in straight lines across the width of the page, providing a guide for writing or drawing without solid lines.This image shows a full page of dot grid paper. It consists of multiple horizontal rows of small, evenly spaced black dots on a white background. The dots are arranged in straight lines across the entire width of the page, providing a guide for handwriting or drawing. There are no margins, text, or other markings present.

Prof

[The page contains faint, illegible text from the reverse side.]

II Les quantificateurs :

Activité 3

- 1 Mettre une croix (x) dans la case qui convient :

Proposition	Vrai	Faux
• Le carré de tout nombre réel est positif.		
• Il existe un nombre réel inférieur strictement à 1.		
• Tout nombre réel est décimal.		
• L'équation $x^2 = 0$ admet une unique solution réelle.		

Les propositions précédentes apparaissent sous forme de phrases, mais on peut les écrire à l'aide des symboles.

Si on symbolise "pour tout" ou "quel que soit" avec le symbole $\forall$ et "il existe au moins" avec le symbole $\exists$, alors la première proposition du tableau devient $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0$ et la deuxième devient $(\exists x \in \mathbb{R}) : x < 1$.

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés les quantificateurs.

- 2 Compléter le tableau suivant en utilisant les symboles $\forall$ et $\exists$.

Proposition	Proposition à l'aide des quantificateurs
• Tous les entiers naturels sont positifs	
.....	$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$
• L'équation $3x - 2 = 0$ admet une solution réelle.	
.....	$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - x + 1 > 0$
• Pour tout réel x , il existe au moins un entier naturel n tel que $x < n + 1$	
.....	• $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : m = 2n$

• Définition : •

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que x est un élément d'un ensemble E .

- Si $P(x)$ est vraie pour tout élément de E on écrit : $(\forall x \in E) : P(x)$.
Le symbole " $\forall$ " s'appelle quantificateur universel et il se lit : pour tout ou quel que soit.
- S'il existe au moins un élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists x \in E) : P(x)$.
Le symbole " $\exists$ " s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : il existe au moins.
- S'il existe un unique élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists! x \in E) : P(x)$.
Le symbole " $\exists!$ " s'appelle quantificateur existentiel de l'unicité et il se lit : il existe un unique.



Exemple :

- 1 La proposition $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : 2x + 1 = 0$ est fausse car si $x = 0$, alors $2 \times 0 + 1 = 0$ est faux.
- 2 La proposition $Q : (\exists n \in \mathbb{N}) : 2n - 4 = 0$ est vraie car l'entier $n = 2$ vérifie $2n - 4 = 0$.
- 3 La proposition $R : (\exists! x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 1 = 0$ est vraie parce que 1 est la seule solution de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Exercice d'application

Réécrire la proposition suivante en utilisant les quantificateurs logiques :

- 1 "La valeur absolue de tout nombre réel non nul est strictement positive."
- 2 "Il existe au moins un nombre réel x tel que $2x^2 - 3x = 0$."
- 3 "L'équation $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ admet une unique solution réelle."
- 4 "Le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ admet au moins une racine."
- 5 "Pour tout nombre réel x , il existe un unique entier N tel que $N \leq x < N + 1$."
- 6 "Il existe un entier multiple de tous les autres."

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Remarque :**

- On peut inverser deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels.
- On ne peut a priori pas inverser un quantificateur existentiel avec un quantificateur universel.

**Exemple :**

- 1 Les propositions " $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " et " $(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " ont la même valeur de vérité.
- 2 Les propositions " $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " et " $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x + y = 2$ " n'ont pas la même valeur de vérité. La première est fausse mais la deuxième est vraie.

Exercice 1

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1 $P_1 : (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x - 1 = 0.$

2 $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 3x + 7 < 0.$

3 $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \leq y.$

4 $P_4 : (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq y.$

5 $P_5 : (\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq y.$

6 $P_6 : (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \leq y.$

Solution :

[The page contains faint dotted lines for writing.]

1 La négation d'une proposition :

Activité 4

Sami et Yassir jouent à un jeu dans lequel Sami doit dire l'opposé de tout ce que Yassir dit. Voici les paroles de Yassir, donnez ce que Sami doit dire.

1 5 est un nombre premier.

.....

2 $\sqrt{3} + 4 = 7$.

.....

3 15 est un multiple de 3.

.....

4 L'ensemble des nombres réels est fini.

.....

5 Toutes les femmes de Marrakech savent faire des gâteaux.

.....

● **Définition :** ●

La négation d'une proposition P , notée $\bar{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui est vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie. Donner moi ce tableau plus simplement :

le tableau suivant est appelé le tableau de vérité de la négation.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V



Exemple :

1 La négation de la proposition $3 > 2$ est $3 \leq 2$.

2 La négation de la proposition $(-2)^2 = -4$ est $(-2)^2 \neq -4$.

3 La négation de la proposition $-3 \in \mathbb{N}$ est $-3 \notin \mathbb{N}$.

4 La négation de la proposition P_1 : "25 est un multiple de 7", est la proposition $\neg P_1$: "25 n'est pas un multiple de 7".

5 La négation de la proposition $\neg P_2 : 3^5 > 5^3$, est la proposition $\neg P_2 : 3^5 \leq 5^3$.

Propriété

- La négation de la proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est " $(\exists x \in E) : \overline{P}(x)$ ".
- La négation de la proposition " $(\exists x \in E) : P(x)$ " est " $(\forall x \in E) : \overline{P}(x)$ ".
- La négation de la proposition " $(\forall x \in E)(\exists y \in E) : P(x, y)$ " est " $(\exists x \in E)(\forall y \in E) : \overline{P}(x, y)$ ".
- La négation de la proposition " $(\exists x \in E)(\forall y \in E) : P(x, y)$ " est " $(\forall x \in E)(\exists y \in E) : \overline{P}(x, y)$ ".

Remarque :

- 1 Les propositions P et $\overline{\overline{P}}$ ont la même valeur de vérité.
- 2 La règle à retenir est la suivante :
Pour nier une expression commençant par "il existe", on transforme le "il existe" en "pour tout" et on nie ce qui suit.
Pour nier une expression commençant par "pour tout", on transforme le "pour tout" en "il existe" et on nie ce qui suit.

- 3 On a :

$$(\exists ! x \in E) ; P(x) \Leftrightarrow (\exists x \in E ; P(x)) \text{ et } (\forall y \in E ; P(y) \Rightarrow y = x).$$

Alors, la négation de $(\exists ! x \in E) ; P(x)$ est :

$$(\forall x \in E ; \overline{P}(x)) \text{ ou } (\exists y \in E ; P(y) \text{ et } y \neq x).$$

- 4 Pour déterminer la négation d'une proposition, il faut déterminer la négation de certains symboles :

Symbole	=	>	<	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\neq$	$\leq$	$\geq$	$\notin$	$\exists$
Négation	$\neq$	$\leq$	$\geq$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$	=	>	<	$\in$	$\forall$

Exemple :

La proposition P	La négation $\overline{P}$
$(\forall x \in \mathbb{R}) : x \geq 1$	$(\exists x \in \mathbb{R}) : x < 1$
$(\exists n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n} \in \mathbb{N}$	$(\forall n \in \mathbb{N}) : \sqrt{n} \notin \mathbb{N}$
$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 \geq 0$	$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + x + 1 < 0$
$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : m \geq n$	$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N}) : m < n$

Exercice d'application

Compléter le tableau suivant :

La proposition P	la négation $\overline{P}$
$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2x + 1 \geq 0$	
$(\forall x \in \mathbb{N}) : x^2 - 2x < 0$	
$(\forall x \in \mathbb{Q}) : \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$	
$(\exists x \in \mathbb{R}) : x \in \mathbb{Q}$	
$(\exists x \in \mathbb{N}) : x$ est pair	
$(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) : x < y$	
$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$	
Tout triangle est rectangle	
$(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x \times y \in \mathbb{Z}$	

2 La disjonction et La conjonction :**Activité 5**

Recopier les expressions suivantes et les compléter par l'un des liens logiques suivants : "ou" ou "et".

- 1 $x(x-1) = 0$ signifie que : $x = 0$ $x = 1$.
- 2 ABCD est un losange signifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $AB = BC$.
- 3 Soit x un réel, on a : $|x| = x$ $|x| = -x$.
- 4 Soit x un réel, $|x| < 1$ signifie que : $1 > x$ $-1 < x$.

a - La disjonction :

• Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie. On la note P ou Q ou $P \vee Q$.

Tableau de vérité de " P ou Q " :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

• Exemple :

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ est vraie.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ ou $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ ou $(3 \text{ divise } 12)$ est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ ou $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

b - La conjonction :

• Définition :

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps. On la note : P et Q ou $P \wedge Q$.

Tableau de vérité de " P et Q " :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

• Exemple :

- La proposition : $(-5 \geq 2)$ et $(5 \geq 2)$ est fausse.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ et $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(-5 \in \mathbb{R})$ et $(3 \text{ divise } 12)$ est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

Exercice d'application

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

- P_1 : (3 est impair) et $(3 = 5)$.
- P_2 : $(4 \times 8 = 20)$ ou (10 est pair).
- P_3 : $(9 - 3 = 6)$ et $(-1 \in \mathbb{Z})$.
- P_4 : $(-4 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0)$.

Solution :

Lois de Morgan

Soient P et Q deux propositions.

- La négation de $(P \text{ et } Q)$ est $(\bar{P} \text{ ou } \bar{Q})$.
- La négation de $(P \text{ ou } Q)$ est $(\bar{P} \text{ et } \bar{Q})$.



Exemple :

- La négation de « $(0 \geq 2)$ et $(1 + 5 = 3)$ » est : « $(0 < 2)$ ou $(1 + 5 \neq 3)$ ».
- La négation de « $(5 \in \mathbb{N})$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0)$ » est : « $(5 \notin \mathbb{N})$ et $(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0)$ ».

Exercice d'application

Nier les deux propositions suivantes :

- P : « $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x \leq y \text{ ou } x \geq y$ ».
- Q : « $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 = x \text{ et } x > 0$ ».

Solution :

3 L'implication

Activité 6

Étudier la valeur de vérité des deux propositions suivantes :

- P : "Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 2".
- Q : "Si un nombre est divisible par 2, alors il est divisible par 4".

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

• Définition : •

L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas où P est vraie et Q est fausse. On la note par $P \Rightarrow Q$ et se lit : " P implique Q ".

Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V



Exemple :

- La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2 + 3 = -1$ est fausse.
- La proposition $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5 - 1 = 20$ est vraie.
- La proposition $(3^2 = 9) \Rightarrow 4 - 1 = 3$ est vraie.
- La proposition $2 < 0 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ est vraie.



Remarque :

- ✓ $P \Rightarrow Q$ signifie si P est vraie, alors Q est vraie.
- ✓ L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.
- ✓ Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, on suppose que P est vraie, et on montre que Q est vraie.
- ✓ Les propositions $P \Rightarrow Q$ et $(\neg P \vee Q)$ ont la même valeur de vérité.



Example :

- 1 " $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ " signifie : "si $x = 2$, alors $x^2 = 4$ " et c'est une proposition vraie.
- 2 " $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ " est l'implication réciproque de " $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ " et c'est une proposition fausse.
- 3 Soit x un réel, montrons que : $|x| \leq 3 \Rightarrow |2x - 4| \leq 10$.

On a :

$$\begin{aligned} |x| \leq 3 &\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ &\Rightarrow -6 \leq 2x \leq 6 \\ &\Rightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 2 \\ &\Rightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 10 \\ &\Rightarrow |2x - 4| \leq 10. \end{aligned}$$

Donc : $|x| \leq 3 \Rightarrow |2x - 4| \leq 10$.

Exercice d'application

- 1** Soit $n \in \mathbb{N}$.
- a** Montrer que n pair $\Rightarrow n^2$ pair.
 - b** Montrer que n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
- 2** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \right)$.

Solution :

Exercice 2

Soient x et y de $\mathbb{R}$. Montrer que $1 + xy = x + y \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$.

- 1 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$.
- 2
 - a Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$.
 - b En déduire $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$.

4 L'équivalence :

Activité 7

On considère l'équation quadratique $H(x) : ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$ et b, c réels.

Soit P et Q deux propositions telles que :

P : "L'équation $H(x)$ admet une unique solution réelle" et

$Q : \Delta = b^2 - 4ac = 0$ (le discriminant est nul).

1 Montrer que $P \Rightarrow Q$.

2 Montrer que $Q \Rightarrow P$.

[illegible]

NB : On a montré que $P \Rightarrow Q$ et que $Q \Rightarrow P$. On note cela par $P \Leftrightarrow Q$ et on dit que : P est équivalente à Q .

● Définition : ●

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition " $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ " qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P est équivalente à Q » ou bien « P si et seulement si Q ». - $P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si P et Q ont même valeur de vérité.

Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

 Example :

Soient a et b deux nombres réels

Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Inversement, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$.

Donc on a l'équivalence suivant : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Exercice d'application

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1 $P_1 : 3 \text{ est impair} \Leftrightarrow 3 = 5.$

2 $P_2 : 4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10$ est pair.

3 $P_3 : -1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6.$

4 $P_4 : -4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 > 0.$

Solution :

[illegible]

IV Lois logiques

1 Lois logiques :

- **Définition :** ●

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions que la constitue.

 Example :

1 P et Q sont deux propositions. Montrons que $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$ est une loi logique.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\lceil(P \Leftrightarrow Q)$	$\lceil P \Leftrightarrow Q$	$\lceil(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\lceil P \Leftrightarrow Q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V



La proposition $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$ est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q . Donc, elle est une loi logique.

- 2 Montrer que la proposition $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une loi logique.

P	Q	$(Q \Rightarrow P)$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

La proposition $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité des propositions P et Q , par conséquent $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ est une loi logique.

2 lois de Morgan :

Propriété

Soit P et Q deux propositions. Les deux propositions suivantes sont les lois de Morgan :

$$\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \quad \text{et} \quad \overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$$

Démonstration :

P	Q	$(Q \vee P)$	$\overline{(Q \vee P)}$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$	$\overline{(Q \vee P)} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1

- Pour la deuxième propriété, on utilise la même méthode.

Exercice d'application

Déterminer la négation des propositions suivantes :

- 1 $(P \Rightarrow Q)$ et $(P \Leftrightarrow Q)$
- 2 $(\exists x \in \mathbb{R}), \quad 0 \leq x < 1$
- 3 $(\forall x \in \mathbb{R}), \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Solution :

Propriété

Soit P , Q , et R trois propositions. Les deux propositions suivantes sont des lois logiques (la distributivité) :

$$1 \quad P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$2 \quad P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Exercice d'application

$$1 \quad \text{Développons } (x-1)(y-2).$$

$$2 \quad \text{Résoudre dans } \mathbb{R}^2 \text{ le système suivant : } \begin{cases} xy - y + 2 - 2x = 0 \\ x^2y - (y^2 + 1)x + y = 0 \end{cases}$$

Solution :

Exercice d'application

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$$1 \quad P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$$

$$2 \quad \neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

$$3 \quad (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

$$4 \quad [P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$$

$$5 \quad [P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$$

$$6 \quad [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Solution :

Prof : Chokri

V Raisonnements mathématiques

1 Le Raisonnement direct

• Définition : •

Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et que, dans un exercice, on nous donne la proposition P , alors on déduit que la proposition Q est vraie. Ce mode de raisonnement s'appelle le raisonnement par déduction.

💡 Exemple :

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$, alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

Solution :

Prenons $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors, on a $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, et $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$.

On a donc :

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or, le numérateur $pq' + qp'$ est un élément de $\mathbb{Z}$, et le dénominateur qq' est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Ainsi, $a + b$ s'écrit sous la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{N}^*$. Donc, $a + b \in \mathbb{Q}$.

2 Raisonnement par contre-exemple :

Propriété

Pour prouver que la proposition " $(\forall x \in E) : P(x)$ " est fausse, il suffit de prouver que la proposition " $(\exists x \in E) : P(x)$ " est vraie.

💡 Exemple :

Montrons que " $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 = 0$ " est fausse.

Il suffit de montrer que " $(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 \neq 0$ " est vraie.

On a pour $x = 0 : 2 \times 0 - 1 \neq 0$ Alors " $(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 \neq 0$ " est vraie.

Par suite " $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x - 1 = 0$ " est fausse.

Exercice d'application

Montrer que les propositions suivantes sont fausses :

- $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}) : x + 1 = 2$.
- $P_2 : (\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Solution :

3 Raisonnement par la contraposée :

Propriété

Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, on peut essayer de démontrer la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ qui est parfois plus simple.

 Example :

Montrons que pour tout x et y dans $\mathbb{R}^+$, si $x \neq y$, alors $x^3 + 4x \neq y^3 + 4y$.
Supposons que $x^3 + 4x = y^3 + 4y$. Alors :

$$\begin{aligned} x^3 + 4x &= y^3 + 4y \Rightarrow x^3 - y^3 + 4x - 4y = 0 \\ &\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 4(x - y) = 0 \\ &\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 4) = 0 \\ &\Rightarrow x - y = 0 \quad \text{car} \quad x^2 + xy + y^2 + 4 \neq 0 \text{ pour } x, y \in \mathbb{R}^+ \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Donc, si $x \neq y$, alors $x^3 + 4x \neq y^3 + 4y$.

Exercice d'application

- 1** Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a + b > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{2} \text{ ou } b > \frac{1}{2}$.
- 2** Montrer que : $(\forall x > 1)(\forall y > 1) : x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$.

Solution :

4 Raisonnement par les équivalences successives :

Propriété

Soient P , R et Q trois propositions.

Le raisonnement par les équivalences successives se base sur la loi logique suivante :

$$[(P \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$



Exemple :

Montrons que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } a^2 + b^2 = 2ab &\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

1 Montrer que : $\forall x \neq -1, \forall y \neq -1, \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x = y$.

2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$.

3 Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

Solution :

Exercice 3

- 1** Soit x un réel. Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
- 2** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $|x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$.
- 3** Soient $a \in [1; +\infty[$ et $b \in [4; +\infty[$. Montrer que :

$$\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = 2 \text{ et } b = 8.$$

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n^2 + n$ est pair.

Solution :

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : |x-1| \leq x^2 - x + 1$.

[illegible][illegible]

6 Raisonnement par absurde :

Propriété

Soient P et Q deux propositions. Le raisonnement par absurde est basé sur la loi logique $[\overline{P} \Rightarrow (Q \text{ et } \overline{Q})] \Rightarrow P$.

Méthode :

Soit P une proposition. Démontrer que la proposition P est vraie par l'absurde consiste à supposer que $\overline{P}$ est vraie et à montrer que cela entraîne une contradiction.

 Exemple :

Soit n un entier naturel tel que n^2 est pair.

Montrons que n est pair : Supposons que n est impair, alors $(\exists k \in \mathbb{N}) : n = 2k + 1$.

Donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair, ce qui contredit le fait que n^2 est pair.

D'où, d'après le principe du raisonnement par l'absurde, n est pair.

Exercice d'application

Soient x, y et z de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x+y+z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ et $xyz > 1$.

Montrer que $x \neq 1$, $y \neq 1$ et $z \neq 1$.

Solution :

Propriété

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une propriété propositionnelle $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

- 1 **Initialisation** : On prouve que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$.
- 2 **Hérédité** : On prend $n \geq n_0$ donné, on suppose que $P(n)$ est vraie, et on démontre que $P(n+1)$ est vraie.
- 3 **Conclusion** : On conclut que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.



Exemple :

Montrons que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1 **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $4^0 - 1 = 0$, et 3 divise 0. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- 2 **Hérédité** : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, 3 divise $4^n - 1$. Montrons que 3 divise $4^{n+1} - 1$:
On a

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1.$$
 D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un entier k tel que $4^n - 1 = 3k$.
Donc,

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4 \times (3k + 1) - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1 = 3 \times (4^n + k).$$
 Donc $4^{n+1} - 1$ est un multiple de 3, ce qui montre que 3 divise $4^{n+1} - 1$.
- 3 **Conclusion** : Par le principe de récurrence, nous concluons que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice d'application

- 1 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \mid 5^n - 3^n$.
- 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des entiers de 1 à n est donnée par $\frac{n(n+1)}{2}$.
- 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des puissances de 2 de 2^0 à 2^n est donnée par $2^{n+1} - 1$.

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Prof : Chokri

Série d'exercices : La logique

Exercice 1

Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1 $((-4)^2 = 16)$ et $(\sqrt{16} = -4)$

2 $(\pi \in \mathbb{Q})$ ou $(\sqrt{8} + \sqrt{7} \geq \sqrt{15})$

3 $(a \in \mathbb{Z})(a \text{ est premier} \Rightarrow a \text{ est impair})$

4 $(x \in \mathbb{R})(x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5)$

Exercice 2

Écrire la négation des propositions suivantes :

1 $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \geq 0 \text{ ou } x \leq 0)$

2 $(\exists x \in \mathbb{N}) (x+1 > x^2)$

3 $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists a \in \mathbb{R}) x < a < x+1$

4 $(\forall x \in \mathbb{N}) (x \neq 1 \Rightarrow x > 1)$

5 $(\forall x \in \mathbb{R}) (\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1)$

Exercice 3

Écrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs :

1 Pour tout entier naturel n , il existe au moins un entier naturel k tel que $k \leq n$

2 Le carré de tout réel est positif

3 Il n'existe aucun rationnel solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$

4 L'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

5 La somme de deux côtés d'un triangle est strictement supérieure au troisième côté.

Exercice 4

On considère la proposition suivante : $(P) : (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 + xy + y^2 = 0$

1 Écrire la négation de (P)

2 Montrer que (P) est fausse

Exercice 5

1 Écrire la négation de $(P) : \forall x \in \mathbb{R}^+ "x \geq 0 \text{ et } x^2 - x + 1 > 0"$

2 Montrer que (P) est vraie

Exercice 6

On considère la proposition suivante :

$$(P) \quad (\forall x \in [0, 2]) \quad \left(\exists y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] \right) : \quad xy - x + 2y - 1 = 0$$

- 1 Écrire la négation de (P)
- 2 Montrer que (P) est vraie

Exercice 7

Soient les quatre assertions suivantes :

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1 $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$ 2 $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0$ | <ol style="list-style-type: none"> 3 $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x$ 4 $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}), (\exists \alpha \in \mathbb{R}^{++}), x < \alpha \Rightarrow x^2 < \varepsilon$ |
|--|---|

Les assertions 1, 2, 3 et 4 sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

Exercice 8

Montrer l'implication suivante : $1 + xy = x + y \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $(S) \begin{cases} (x+1)(y-4) = 0 \\ (x-3)(y+2) = 0 \end{cases}$

Exercice 10

Soient a, b et c trois réels strictement positifs, qui vérifient : $abc > 1$ et $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
Montrer que :

- 1 Tous ces nombres sont différents de 1
- 2 L'un de ces nombres est inférieur à 1

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$

Exercice 12

Soit n un entier naturel
Montrer que si $2n + 1$ est un carré parfait alors $(n + 1)$ est somme de deux carrés parfaits

Exercice 13

Soient a et b deux réels appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$. Montrer que $\frac{a+b}{1+ab} \in] -1, 1[$

Exercice 14

Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0) \quad |a| \leq \varepsilon \Rightarrow a = 0$

Exercice 15

Soient x et y deux réels appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$
Montrer que : $x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$

Exercice 16

1 Montrer que : $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2) \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ et } b = 0$

2 Soient x et y deux réels positifs, montrer que : $x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1$

Exercice 17

1 Soit n un entier naturel. **Montrer que** : n est pair $\Leftrightarrow n^2$ est pair

2 a Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

b Montrer que : $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 18

Soient x et y deux réels, montrer que : $(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$

Exercice 19

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{x^2 + 1} + x > 0$

Exercice 20

Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.

Exercice 22

Trouver un entier naturel p tel que si : $n > p$, alors $\frac{n^2 - 9\sqrt{n}}{n^2 + 1}$ appartient à l'intervalle ouvert de centre 1 et de rayon 10^{-5}

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 2x^2 - x + 3$
Montrer que f est ni pair ni impair.

Exercice 24

Montrer par récurrence que :

$$1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$4 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$5 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$$

$$6 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n = \frac{7^{n+1} - 1}{6}$$

$$7 \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 4^n + 6n - 1 \text{ est divisible par } 9$$

$$8 \quad \text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est divisible par } 7$$

$$9 \quad (\forall n \geq 4) \quad 2^n \geq n^2$$

$$10 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^{++}) (\forall n \in \mathbb{N}) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$