

SUPPORT DE COURS

Les Ensembles

1^{ère} BAC Sciences mathématiques

Lycée Moulay Ali cherif

Enseignant

Dr : CHOKRI NOUAR

www.chokrinouar.com

Table des matières

2	Les Ensembles	3
2.1	Détermination d'un ensemble.	3
2.1.1	Approche – vocabulaire	3
2.2	L'inclusion – double inclusion – ensemble des parties	4
2.2.1	L'inclusion – double inclusion	4
2.2.2	Ensemble des parties d'un ensemble	5
2.3	Opérations sur les ensembles	5
2.3.1	Intersection de deux ensembles.	5
2.3.2	L'union.	6
2.3.3	Lois de De Morgan	7
2.3.4	Partie complémentaire.	7
2.3.5	La différence de deux ensembles.	8
2.3.6	La différence symétrique	9
2.3.7	Produit cartésien de deux ensembles.	9
2.4	Série d'exercices avec correction.	10
2.5	Série d'exercices	12

Les Ensembles

2.1 Détermination d'un ensemble

2.1.1 Approche – vocabulaire

Activité 1

Soit l'ensemble D_4 des diviseurs positifs du nombre 4.

Question : écrire cet ensemble de deux façons différentes.

- Première façon : $D_4 = \{1, 2, 4\}$. On dit que D_4 est écrit en extension (écriture en extension).
- Deuxième façon : $D_4 = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ divise } 4\}$. On dit que D_4 est écrit en compréhension (écriture en compréhension).

Certains ensembles peuvent être représentés de la manière suivante : chaque élément de cet ensemble est écrit dans un endroit, et à côté de lui on met le symbole $\times$ ou $\bullet$, puis on relie tous les éléments par une ligne, et à l'extérieur on écrit le symbole de l'ensemble (dans cet exemple D_4). La figure obtenue s'appelle le diagramme de Venn.

Exemple 2.1. Soit :

$$H = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \mid mn + 2 - 3n = 7\}.$$

Écrire l'ensemble H en extension. **Solution :** Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. On a :

$$\begin{aligned} mn + 2 - 3n = 7 &\iff mn - 3n = 5 \\ &\iff n(m - 3) = 5. \end{aligned}$$

Donc les possibilités sont

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 5 \\ m - 3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = -5 \\ m - 3 = -1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 1 \\ m - 3 = 5 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = -1 \\ m - 3 = -5 \end{array} \right.$$

Ainsi

$$H = \{(8, 1), (-2, -1), (4, 5), (2, -5)\}.$$

Exercice 2.1. Exercice d'application.

1. Écrire les ensembles suivants en compréhension : $F =] - 5, 5[$ et $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$.

2. Écrire les ensembles suivants en extension :

$$B = \{d \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, 20 = k \times d\} \quad \text{et} \quad C = \{p \in \mathbb{Z} \mid (p-3)(2p-5) = 0\}.$$

Solution :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 L'inclusion – double inclusion – ensemble des parties

2.2.1 L'inclusion – double inclusion

L'inclusion

Définition 2.2.1. On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si et seulement si tout élément x de A est aussi un élément de B . On note $A \subset B$.

Remarque.

$$A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Exemple 2.2. Soient les ensembles $E = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13\}$ et $A = \{4, 5, 7, 9\}$. Donner le diagramme de Venn de A et E .

Égalité de deux ensembles (ou double inclusion)

Définition 2.2.2. On dit que deux ensembles sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarque.

- $A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$;
- $A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$.

Exemple 2.3. Soient les ensembles $F =]0, 1[$ et $E = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}, x > 1 \right\}$. Démontrer que $E = F$.

Solution : On montre que $E \subset F$. Soit $y \in E$, alors $y = \frac{1}{x}$ et $x > 1$. Donc $x > 0$ et $\frac{1}{x} < 1$, d'où $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $0 < y < 1$. Ainsi $E \subset F$.

On montre que $F \subset E$. Soit $y \in F$, alors $0 < y < 1$. On pose $y = \frac{1}{x}$; on obtient $x > 1$ et $y = \frac{1}{x}$, donc $y \in E$. Ainsi $F \subset E$. Par suite $E = F$.

2.2.2 Ensemble des parties d'un ensemble

Activité 2

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. Donner toutes les parties de E .
Les parties de E sont : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$.

Définition 2.2.3. Soit E un ensemble. Toutes les parties de E constituent un ensemble, appelé ensemble des parties d'un ensemble E , et sera noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque.

- $A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$;
- Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont « sous forme des ensembles » ;
- Si $E = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$;
- Le nombre d'éléments de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ est $2^{\text{nombre d'éléments de } E}$.

Exemple 2.4. Écrire en extension $\mathcal{P}(E)$ pour les ensembles suivants : $E = \{2\}$; $E = \{\emptyset\}$; $E = \{1, 2\}$; $E = \{\{1, 2\}\}$.

Solution :

1. $\mathcal{P}(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$;
2. $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
3. $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
4. $\mathcal{P}(\{\{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{\{1, 2\}\}\}$.

2.3 Opérations sur les ensembles

2.3.1 Intersection de deux ensembles

Définition 2.3.1. Soient A et B deux ensembles. Les éléments communs de A et B constituent l'ensemble noté $A \cap B$, appelé intersection de A et B . Donc :

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Remarque.

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B).$$

Exemple 2.5. Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$. Alors $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

Exercice 2.2. Exercice d'application.

Soit $A = \{p \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq |p| \leq 5\}$. Déterminer $A \cap]-\infty, 3[$.

Solution :

.....

Propriété 2.3.1. Soient A , B et C trois ensembles.

- $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap A = A$;
- $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B = B \cap A$ (l'intersection est commutative);
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ (l'intersection est associative).

Démonstration : Démontrons que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B) \cap C &\iff x \in A \cap B \text{ et } x \in C \\
 &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \in C \\
 &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \in C) \\
 &\iff x \in A \cap (B \cap C).
 \end{aligned}$$

Conclusion : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

2.3.2 L'union

Définition 2.3.2. Soient A et B deux ensembles. Les éléments qui appartiennent à A ou à B constituent l'ensemble noté $A \cup B$, appelé union de A et B . Donc :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Remarque.

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

Exemple 2.6. Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$. Alors

$$A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 44, 50\}.$$

Propriété 2.3.2. Soient A , B et C trois ensembles.

- $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup A = A$;
- $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$;
- $A \subset B \iff A \cup B = B$;
- l'union est commutative : $A \cup B = B \cup A$;

- l'union est associative : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$;
- l'union est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$.

Exercice 2.3. Exercice d'application.

Démontrer que l'intersection est distributive sur l'union.

Solution : On montre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned}
 x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \in B \cup C \\
 &\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\
 &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \\
 &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).
 \end{aligned}$$

Conclusion 1 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

On montre ensuite $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ en utilisant la commutativité de $\cap$ et la conclusion 1. Conclusion : l'intersection est distributive sur l'union.

2.3.3 Lois de De Morgan

Soient A et B des parties d'un ensemble E :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 x \in \overline{A \cup B} &\iff x \notin A \cup B \\
 &\iff x \notin A \text{ et } x \notin B \\
 &\iff x \in \bar{A} \cap \bar{B},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 x \in \overline{A \cap B} &\iff x \notin A \cap B \\
 &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\
 &\iff x \in \bar{A} \cup \bar{B}.
 \end{aligned}$$

2.3.4 Partie complémentaire

Définition 2.3.3. Soit A une partie d'un ensemble E (c'est-à-dire $A \subset E$). L'ensemble B qui contient tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à la partie A s'appelle la partie complémentaire de A dans E , et on note $B = C_E^A$ ou $B = \bar{A}$. Donc :

$$B = C_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Remarque.

- $x \in C_E^A \iff (x \in E \text{ et } x \notin A)$;
- $x \in \bar{A} \iff x \notin A$.

Exemple 2.7. Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $A = \{1, 2, 4, 8\}$. On a $A \subset E$, d'où $C_E^A = \{3, 5, 6, 7, 9\}$. De plus $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_-^*$ et $C_{\mathbb{R}}^{[1,3]} =]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.

Propriété 2.3.3. Soit E un ensemble.

- $C_E^\emptyset = E$ et $C_E^E = \emptyset$;
- $\overline{\bar{A}} = A$, c'est-à-dire $C_E^{C_E^A} = A$;
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = E$;
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Démonstration : Démontrons $C_E^{C_E^A} = A$. Soit $x \in C_E^{C_E^A}$. Alors $x \notin C_E^A$, donc $x \in A$. Ainsi $C_E^{C_E^A} = A$.

Démontrons $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. On a :

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \in E \text{ et } x \notin A \cup B \iff x \in E \text{ et } (x \notin A \text{ et } x \notin B) \iff x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Démontrons $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$. Soit $x \in C_E^{A \cap B}$. Alors

$$x \notin A \cap B \iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \iff x \in C_E^A \cup C_E^B.$$

Ainsi $C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B$.

Exercice 2.4. Exercice 1.

Montrer que :

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Solution : On utilise la définition $A \setminus X = A \cap C_E^X$. Ainsi

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cap C) &= A \cap C_E^{B \cap C} \\ &= A \cap (C_E^B \cup C_E^C) \\ &= (A \cap C_E^B) \cup (A \cap C_E^C) \\ &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

2.3.5 La différence de deux ensembles

Définition 2.3.4. Soient A et B deux ensembles. Les éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B constituent l'ensemble noté $A \setminus B$, appelé différence de l'ensemble A et l'ensemble B (l'ordre est important). Donc :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

Remarque.

$$x \in A \setminus B \iff (x \in A \text{ et } x \notin B).$$

Exemple 2.8. Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$. Les éléments exclusifs de chaque ensemble donnent les deux différences.

Exercice 2.5. Exercice 2.

Déterminer $A \setminus B$ puis $B \setminus A$ avec : $A = \mathbb{Z}$ et $B = \mathbb{N}^*$; $A = \mathbb{R}$ et $B = [1, 5[$.

Solution : Premier cas : $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Alors $A \setminus B = \mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$ et $B \setminus A = \emptyset$ car $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}$.

Deuxième cas : $A = \mathbb{R}$, $B = [1, 5[$. Alors $A \setminus B =]-\infty, 1[\cup [5, +\infty[$ et $B \setminus A = \emptyset$ car $[1, 5[\subset \mathbb{R}$.

2.3.6 La différence symétrique

Définition 2.3.5. Soient A et B deux ensembles. La différence symétrique de A et B est l'ensemble noté $A \triangle B$ tel que :

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Donc :

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\}.$$

Exemple 2.9. Soient $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\}$. On représente $A \cap B$ et $A \triangle B$ par un diagramme de Venn. On a $A \triangle B = \{1, 3, 5, -1, 10, 44, 50\}$ et $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.

Propriété 2.3.4. — $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

— $A \triangle B = B \triangle A$;

— $(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (A \triangle B)$;

— $A \triangle \emptyset = A$;

— $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.

Démonstration :

1. Montrons que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On rappelle que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Par les lois de De Morgan et la distributivité, on retrouve $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Montrons que $A \triangle B = B \triangle A$: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \triangle A$.
3. Montrons que $(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (A \triangle B)$. Cela découle de la commutativité de la différence symétrique.
4. Montrons que $A \triangle \emptyset = A$: $(A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$.
5. Montrons que $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$. En développant la différence symétrique et en distribuant $\cap C$, on obtient le résultat.

2.3.7 Produit cartésien de deux ensembles

Définition 2.3.6. Soient A et B deux ensembles. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ qui est constitué de tous les couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. Donc :

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Remarque.

- $(x, y) \in A \times B \iff (x \in A \text{ et } y \in B)$;
- $E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$;

- $A \times B \neq B \times A$ en général;
- si $A = B$, on note $A \times A = A^2$;
- $B \times A = \{(x, y) \mid x \in B \text{ et } y \in A\}$.

Exemple 2.10. Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$. On a :

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Exercice 2.6. Exercice d'application.

1. Écrire en extension $E \times F$ où $E = \{1, 2\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$.
2. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que $(A \subset E \text{ et } B \subset F) \Rightarrow A \times B \subset E \times F$.

Solution :

Généralisation :

1. Soient E_1, E_2, E_3 trois ensembles. Si $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_3 \in E_3$, l'écriture (x_1, x_2, x_3) s'appelle le triplet et est un élément de $E_1 \times E_2 \times E_3$. De plus :

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(x, y, z) \mid x \in E_1, y \in E_2, z \in E_3\}.$$

2. On considère les ensembles E_i avec $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_n$ dans cet ordre est noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ ou encore $\prod_{j=1}^n E_j$. Ses éléments sont les n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$.

Remarque. Cas particulier : si $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$, on note $E_1 \times \dots \times E_n = E^n$. En particulier $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, donc $(\sqrt{2}, -5, 7) \in \mathbb{R}^3$.

2.4 Série d'exercices avec correction

Exercise 2.7. Exercice 3.

On considère l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Écrire l'ensemble A en extension.

Solution : Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si $x \in A$, alors $\frac{x+1}{2x+1} \in \mathbb{Z}$. Comme $\frac{2x+2}{2x+1} = 1 + \frac{1}{2x+1}$, on obtient $\frac{1}{2x+1} \in \mathbb{Z}$, donc $2x+1$ divise 1. Ainsi $2x+1 = 1$ ou $2x+1 = -1$, donc $x = 0$ ou $x = -1$. Réciproquement, pour $x = 0$ et $x = -1$, la fraction est entière. Donc

$$A = \{-1, 0\}.$$

Exercice 2.8. Exercice 4.

On considère les ensembles

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < \frac{3}{2} \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{2x+3}{2} \leq 4 \right\}.$$

Déterminer en extension $A \cap B$ et $A \cup B$.

Solution : $|x-1| < \frac{3}{2} \iff -\frac{3}{2} < x-1 < \frac{3}{2} \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$, donc $A = \{0, 1, 2\}$. Et $\frac{2x+3}{2} \leq 4 \iff 2x+3 \leq 8 \iff x \leq \frac{5}{2}$, donc $B = \{0, 1, 2\}$. Ainsi

$$A \cup B = \{0, 1, 2\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{0, 1, 2\}.$$

Exercice 2.9. Exercice 5.

On considère

$$A = \left\{ \frac{2n+1}{4} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{5m+4}{3} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que $A \cap B = \emptyset$ et $B \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Solution : Supposons par l'absurde $A \cap B \neq \emptyset$. Il existe $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\frac{2n+1}{4} = \frac{5m+4}{3}$, donc $6n+3 = 20m+16$, soit $3n-10m = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}$, contradiction. Donc $A \cap B = \emptyset$. De plus $3 \in B$ pour $m = 1$ et $3 \in \mathbb{N}$, donc $B \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Exercice 2.10. Exercice 6.

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array} \right\} \Rightarrow B = C.$$

Solution : Supposons les deux égalités. Soit $x \in B$. Comme $x \in A \cup B = A \cup C$, on a $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \notin C$, alors $x \in A$, donc $x \in A \cap B = A \cap C$, d'où $x \in C$, contradiction. Ainsi $B \subset C$. Par un raisonnement symétrique, $C \subset B$. Donc $B = C$.

Exercice 2.11. Exercice 7.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Montrer que

$$A = B \iff A \cap B = A \cup B.$$

Solution : Si $A = B$, alors $A \cap B = A = A \cup B$. Réciproquement, si $A \cap B = A \cup B$, pour $x \in A$, on a $x \in A \cup B = A \cap B$, donc $x \in B : A \subset B$. De même $B \subset A$. Donc $A = B$.

2.5 Série d'exercices

Exercice 2.12. Exercice 1.

On considère $A = \{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{(2n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer $A \cap B$.

Exercice 2.13. Exercice 2.

On considère $A = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $B = \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Montrer que $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 2.14. Exercice 3.

Décrire $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ où a désigne un élément.

Exercice 2.15. Exercice 4.

Soient A, B, C, D des parties de E . Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} (B \setminus C) \cup A = E \\ (C \setminus D) \cup A = E \end{array} \right\} \Rightarrow (B \setminus D) \subset A.$$

Exercice 2.16. Exercice 5.

Étant donné A et B deux parties de E , justifier :

$$C_E^A \setminus C_E^B = B \setminus A.$$

Exercice 2.17. Exercice 6.

Étant donné A, B, C trois parties de E , montrer que :

1. $A \triangle B = A \triangle C \iff B = C$;
2. $A \setminus B = A \iff B \setminus A = B$;
3. $A \triangle B = A \cap B \Rightarrow A = B = \emptyset$.

Exercice 2.18. Exercice 7.

Soient A et B deux parties de E . Discuter et résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 2.19. Exercice 8.

Soient A et B deux parties de E . Discuter et résoudre l'équation $A \cap X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 2.20. Exercice 9.

Soient A et B deux parties de E .

1. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ et que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
3. Montrer que si $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ alors $(A \subset B \text{ ou } B \subset A)$.

Exercice 2.21. Exercice 10.

Soient E et F deux ensembles, A et B deux parties de E , C et D deux parties de F .

1. Montrer que $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
2. Montrer que $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Exercice 2.22. Exercice 11.

Soient E et F deux ensembles. A est une partie de E et B est une partie de F .

1. Montrer que $C_E^A \times C_F^B \subset C_{E \times F}^{A \times B}$.
2. Montrer que $C_{E \times F}^{A \times B} = E \times C_F^B \cup C_E^A \times F$.

Exercice 2.23. Exercice 12.

Étant donné A, B, C trois parties de E , montrer que :

1. $A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap \bar{C})$;
2. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$;
3. $A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C} \iff A \cap B = A \cap C$.